ریاضی لذت‌بخش

در کلاس خانم جمشیدی

بخش ۱: مینی‌مم کردن از طریق بازتاب

آناهیتا کمیجانی
دبیر ریاضی تهران

اشاره

کلاس‌هایش را دوست دارم. خانم جمشیدی را می‌گویم، دبیر ریاضی‌مان.
تفاوت کلاس‌های ریاضی خانم جمشیدی با بقیهٔ کلاس‌هایمان این است که مطالب ریاضی را با روشی جذاب و سرگرم‌کننده درس می‌دهد. به علاوه، به ما اجازه می‌دهد روی مسائل خوب فکر کنیم و نظراتمان را بیان کنیم.
اوایل از روش تدریس او تعجب می‌کردیم و متوجه نمی‌شدیم که در حال درس دادن است. روش او بسیار جدید و متفاوت بود. حتی گاهی فکر می‌کردیم در حال صحبت کردن معمولی هستیم. از ریاضی خشک و دست‌نیافتنی خبری نبود و مسائل حل نشدنی جای خود را با مسائل واقعی حل شدنی عوض کرده بودند. بعد از مدتی متوجه شدیم، بیشتر از هر کلاس ریاضی دیگری در کلاس خانم جمشیدی «ریاضی» یاد می‌گیریم: «ریاضی لذت‌بخش»! به همین خاطر تصمیم گرفتم کلاس‌های ریاضی‌مان و تمام صحبت‌های ردوبدل شده بین بچه‌های کلاس با دبیر خلاقمان، خانم جمشیدی را مکتوب کنم و با دیگران سهیم شوم. مطمئن هستم شما هم از این مطالب لذت می‌برید.

جلسهٔ اول: شنبه ۲۲ مهرماه ۱۳۹۶

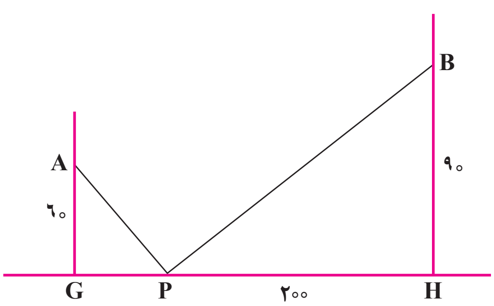
خانم جمشیدی وارد کلاس شد و با رویی گشاده و لبخندی بر لب گفت: «سلام بچه‌ها! صبحتون به‌خیر!».

همگی ایستادیم و سلام کردیم. خانم جمشیدی گفت: «بچه‌ها تا به حال فکر کردید، مرغ ماهی‌خوار چه مشکلاتی توی زندگی داره؟»

ما هم سری تکان دادیم که یعنی از مشکلات مرغ ماهی‌خوار خبر نداریم! واقعاً چه مشکلاتی دارد؟ این هم به ریاضی ارتباط پیدا می‌کند؟! خانم جمشیدی گفت: «مرغ ماهی‌خوار هم برای موفقیت به ریاضی احتیاج دارد!»

واقعاً حرف جالبی زد. یعنی حتی حیوانات هم به ریاضی نیاز دارند!

خانم جمشیدی شکل ۱ را پای تخته رسم کرد و ادامه داد: «در این شکل یک مرغ ماهی‌خوار داریم که در نقطهٔ A، ۶۰ متری بالای زمین روی یک درخت، کنار رودخانه‌ی پر از ماهی نشسته و می‌تواند به هر نقطه‌ای بین G و H پرواز کند و بعد به آشیانه‌اش که در نقطهٔ B، ۹۰ متری بالای زمین قرار داد، برگردد. طول GH ۲۰۰ متر است. سؤال من از شما این است که P چه نقطه‌ای از GH باشد تا مرغ ماهی‌خوار در نقطهٔ P ماهی بگیرد؛ به طوری که حاصل جمع AP و PB، یعنی مسیر پرواز او، کمترین مقدار ممکن شود؟»



شکل ۱

همگــی به فکر فــرو رفتیم. واقعــاً P چه نقطه‌ای می‌تواند باشد؟ خانم جمشیدی راهنمایی‌مان کرد: «به شما پیشنهاد می‌کنم که اول برای GP عددهای متفاوت و دلخواه قرار بدهید و بــه ازای آن مقدارها، مقدارهای AP را پیدا کنید و بعد مقدارهای PB را حســاب کنید. در نهایــت هم AP و PB را جمع کنید، ببینید کمترین مقدارش چند می‌شود؟»

ما سریع دست به‌کار شــدیم و با کمک هم جدول کاملی از مقدارهای ممکن GP درست کردیم. بعد APها و PBها را حساب کردیم و در آخر AP+PB را به دست آوردیم. جدول زیر نتیجهٔ کار گروهی ما شد.

GP	AP	PB	AP+PB
۱۰	۶۰/۸۲۷۶۳	۲۱۰/۲۳۸	۲۷۱/۰۶۵۶
۲۰	۶۳/۲۴۵۵۵	۲۰۱/۲۴۶۱	۲۶۴/۴۹۱۷
۳۰	۶۷/۰۸۲۰۴	۱۹۲/۳۵۳۸	۲۵۹/۴۳۵۹
۴۰	۷۲/۱۱۱۰۳	۱۸۳/۵۷۵۶	۲۵۵/۶۸۶۶
۵۰	۷۸/۱۰۲۵	۱۷۴/۹۲۸۶	۲۵۳/۰۳۱۱
۶۰	۸۴/۸۵۲۸۱	۱۶۶/۴۳۳۲	۲۵۱/۲۸۶
۷۰	۹۲/۱۹۵۴۴	۱۵۸/۱۱۳۹	۲۵۰/۳۰۹۳
۸۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۵۰
۹۰	۱۰۸/۱۶۶۵	۱۴۲/۱۲۶۷	۲۵۰/۲۹۳۲
۱۰۰	۱۱۶/۶۱۹	۱۳۴/۵۳۶۲	۲۵۱/۱۵۵۳
۱۱۰	۱۲۵/۲۹۹۶	۱۲۷/۲۷۹۲	۲۵۲/۵۷۸۹
۱۲۰	۱۳۴/۱۶۴۱	۱۲۰/۴۱۵۹	۲۵۴/۵۸
۱۳۰	۱۴۳/۱۷۸۲	۱۱۴/۰۱۷۵	۲۵۷/۱۹۵۸
۱۴۰	۱۵۲/۳۱۵۵	۱۰۸/۱۶۶۵	۲۶۰/۴۸۲
۷۸	۹۸/۴۰۷۳۲	۱۵۱/۶۰۴۷	۲۵۰/۰۱۲۱
۷۹	۹۹/۲۰۱۸۱	۱۵۰/۸۰۱۲	۲۵۰/۰۰۳
۸۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۵۰
۸۱	۱۰۰/۸۰۱۸	۱۴۹/۲۰۱۲	۲۵۰/۰۰۳
۸۲	۱۰۱/۶۰۷۱	۱۴۸/۴۰۴۹	۲۵۰/۰۱۱۹
۷۹/۸	۹۹/۸۴۰۰۷	۱۵۰/۱۶	۲۵۰/۰۰۰۱
۷۹/۹	۹۹/۹۲۰۰۲	۱۵۰/۰۸	۲۵۰
۸۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۵۰
۸۰/۱	۱۰۰/۰۸	۱۴۹/۹۲	۲۵۰
۸۰/۲	۱۰۰/۱۶۰۱	۱۴۹/۸۴	۲۵۰/۰۰۰۱

من نگاهی به عددهای جــدول کردم و گفتم: «به نظــر می‌آید کمترین مقدار بــرای AP+PB، ۲۵۰ متر است که در این حالت GP برابر ۸۰ متر می‌شود.

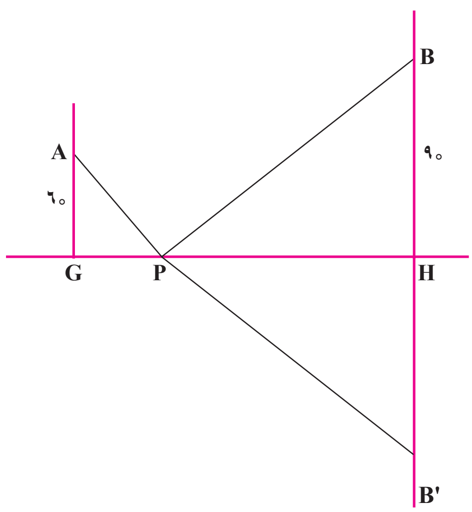
باران گفت: «بهار درست می‌گوید P در ۸۰ متری G است و همین‌طور در ۱۲۰ متری H».

مهتاب در تأیید صحبت‌هــای باران گفت: «کاملاً درســت است و در این حالت AP، ۱۰۰ متر و PB هم ۱۵۰ متر اســت. جالب است که نســبت ۸۰ به ۱۲۰ می‌شــود. $\frac{۲}{۳}$ و نســبت ۱۰۰ به ۱۵۰ هم همین مقدار می‌شود».

من گفتم: «و این نســبت دقیقاً نسبت دو تا ارتفاع است! نسبت ۶۰ به ۹۰!».

همگی هیجان‌زده بودیم. مهتاب انگار چیزی کشف کرده بود، با صــدای بلند گفت: «پس یعنی کوتاه‌ترین فاصله وقتی به دســت می‌آید کــه مثلث‌های AGP و BHP متشــابه باشند. می‌شــود گفت همیشه این‌جور است؟!»

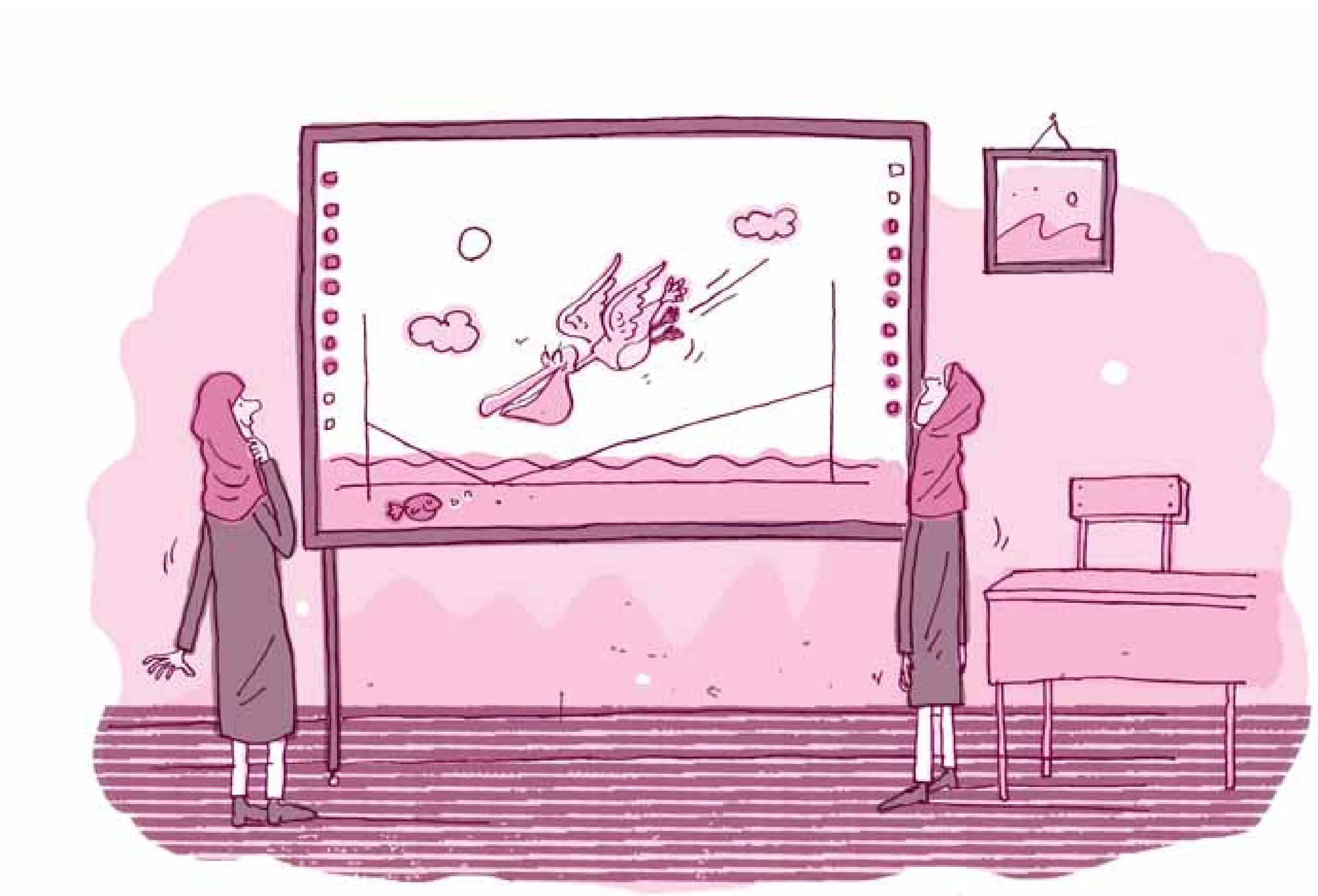
خانم جمشیدی شکل ۲ را برایمان رسم کرد و گفت: «بسیار خب! حالا به این شکل دقت کنید. همان‌طور که می‌بینید، ´HB قرینهٔ HB نسبت به رودخانه است».



شکل ۲

باران گفــت: «و زاویه‌هــای BPH و ´B´PH با هم برابرند. بنابراین مقدار AP+PB همان مقدار ´AP+PB می‌شود».

خانم جمشیدی با لحن مهربانی گفت: «بله، کاملاً صحیح است! ادامه بدهید!»



من سریع گفتم: «یعنی اگر ´AP+PB را مینی‌مم کنیم، انگار AP+PB را مینی‌مم کردیم!»

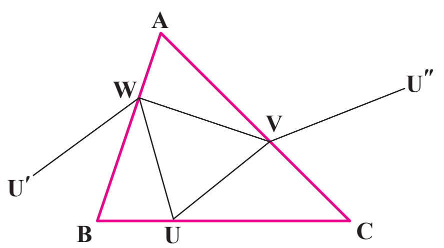
مهتاب بلافاصله ادامـــه داد: «پس فکر کنم P باید در نقطه‌ای قرار بگیرد که ´APB یک خط راست بشود و زاویه‌های APG و B´PH متقابل به رأس می‌شـــوند و بنابرایـــن برابرند که دلیل تشـــابه مثلث‌های AGP و BHP است».

خانم جمشـــیدی گفـــت: «دقیقاً آفرین به شـــما! می‌شود این‌طور گفت که دو قسمت پر مرغ ماهی‌خوار با رودخانه زاویه‌های مساوی می‌سازد».

باران گفت: «دقیقاً شـــبیه مطالبی که توی فیزیک خواندیم، شـــبیه شعاع نور اســـت که با همان زاویه‌ای منعکس می‌شود که تابیده است!»

خانم جمشیدی اضافه کرد: «بله و درواقع این قانون فیزیک به این واقعیت وابســـته است که نور مسیری را انتخـــاب می‌کند که آن را در کوتاه‌ترین زمان طی کند. حالا من یک مســـئلهٔ مینی‌مم ســـازی دیگر را مطرح می‌کنم، به شکل ۳ دقت کنید.

یک جزیره به شکل یک مثلث ABC است که تمام زاویه‌هایش حاده هستند.



شکل ۳

ایستگاه‌های V ،U و W در ساحل‌های CA ،BC و AB قرار دارند که با یک کابل با هم در ارتباط‌اند.

به این فکر کنید که ایســـتگاه‌ها در چه نقاطی باید قرار گیرند تا طول کل کابل مینی‌مم شـــود؟ اگر دقت کنید متوجه می‌شوید که ´U و ˝U قرینهٔ U نسبت به AB و AC هستند».

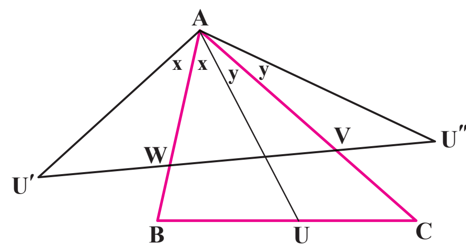
مـــن گفتـــم: «طـــول کل کابـــل همـــان انـــدازهٔ ˝U´W+WV+VU است. به نظرتان می‌شود از این سه قسمت یک خط راست بسازیم؟»

مهتاب فکری به نظرش رسید: «خب نمی‌شود یک خط راست از ´U به ˝U رسم کنیم و W و V را نقاطی بگیریم که ساحل‌ها را قطع می‌کند؟»

خانم جمشیدی در جواب گفت: «بله، درست است.

این کار مینی‌مم مقدار را برای کابل به ازای نقطهٔ U انتخابی می‌دهد. چون موقعیت‌های U' و U'' بنا به موقعیت U مشخص می‌شود. شکل‌ها این موضوع را نشان می‌دهد».

شکل جدید ما همین شکل ۴ بود. باران نگاهی به شکل انداخت و متفکرانه گفت: «پس اندازهٔ $U'U''$ کل طول کابل می‌شود، درست است؟»



شکل ۴

خانم جمشیدی تأیید کرد و گفت: «حالا فقط باید تصمیم بگیریم U را کجا قرار بدهیم؟ من از A به نقاط U و U' و U'' وصل کردم».

مهتاب گفت: «سه پاره‌خط رسم شده از A همگی مساوی‌اند، چون AU' و AU'' قرینهٔ AU نسبت به AB و AC هستند. بنابراین مثلث $U'AU''$ متساوی‌الساقین است».

من گفتم: «زاویه‌هایی که با حرف x مشخص شده‌اند، به دلیل بازتاب با هم برابرند. همین‌طور زاویه‌های y هم با هم برابرند».

باران در ادامه صحبت من گفت: «و $B\hat{A}C = x + y$ که یعنی: $U'\hat{A}U'' = 2B\hat{A}C$».

مهتاب گفت: «پس هر جایی که U را قرار بدهید، مثلث متساوی‌الساقین $U'AU''$ همیشه زاویه‌ای مشابه در رأس A دارد و هر مثلثی که تشکیل بشود با مثلث $U'AU''$ متشابه است».

خانم جمشیدی لبخندی زد و گفت: «کاملاً درست می‌گویی مهتاب جان! و ما می‌خواهیم مثلثی را پیدا کنیم که در آن $U'U''$ کمترین مقدار خود را داشته باشد».

مهتاب گفت: «پس باید AU را طوری بسازیم که کمترین مقدار ممکن را داشته باشد». باران گفت: «یعنی AU باید بر BC عمود باشد. از این حالت دیگر کوتاه‌تر نمی‌شود».

من هم ادامه دادم: «پس احتمالاً BV هم باید بر CA عمود باشد و CW هم بر AB».

خانم جمشیدی صحبت‌ها را جمع‌بندی کرد و گفت: «دقیقاً همین‌طور است! بهترین مکان برای قرار دادن ایستگاه‌ها پای ارتفاع‌هاست. مثلثی که با کابل‌ها تشکیل می‌شود «مثلث پادکی» (Pedal triangle) برای مثلث ABC نامیده می‌شود و کمترین محیط را برای هر مثلث دارد با رئوسی که روی سه ساحل جزیره قرار داده می‌شوند».

تا جلسهٔ بعدی خداحافظ